EXAMEN DERIVADAS **Mayo 2004**

1.- Definición de función derivada de una función.
Utilizando la definición, calcula la función derivada de la función $f(x) = x^2 - 5x + 7$ y halla la pendiente de la tangente a esta curva en el punto de abscisa x=-1. (2 puntos)

2.- Dibuja una función que tenga derivada nula en x= -1 y x = 1, derivada negativa en el intervalo $(-1,1)$ y positiva para cualquier otro valor de x. (1 punto)

2.- Halla las derivadas de las siguientes funciones: (5 puntos)

a) $y = \dfrac{2x^3 - 3x^2 + 2}{5x}$

b) $y = \sqrt{\cos x - sen\, x}$

c) $y = \ln\left[\dfrac{x-3}{x+3}\right]$

d) $y = (x^2 + 3x) \cdot e^{-2x+1}$

e) $y = \left(2x - \sqrt{x}\right)^2$

3.- Halla razonadamente un punto de la función $y = x^2 + x + 1$ en el que la recta tangente sea paralela a la recta de ecuación $y = 3x + 7$. Halla también la ecuación de dicha recta tangente. (2 puntos)

SOLUCIONES

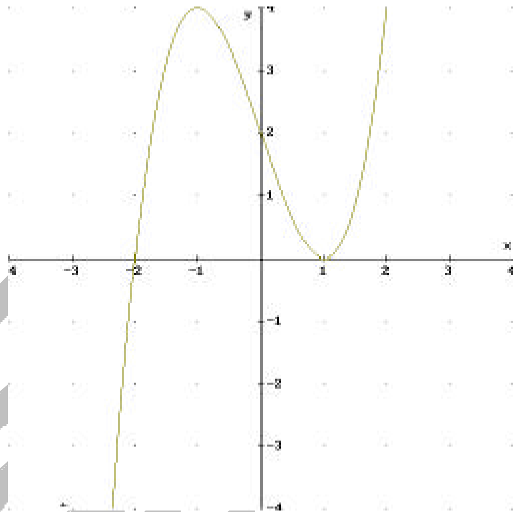
1.- $f(x) = x^2 - 5x + 7$ La función derivada es $f'(x) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$, de donde:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - 5(x+h) + 7 - (x^2 - 5x + 7)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + h^2 + 2xh - 5x - 5h - x^2 + 5x - 7}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h^2 + 2xh - 5h}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(h + 2x - 5)}{h} = \lim_{h\to 0} (h + 2x - 5) = 2x - 5$$

La pendiente de la tangente en x=-1 será $f'(-1) = 2 \cdot (-1) - 5 = -7$

2.- Una función que cumpla las características pedidas, tendrá que ser decreciente (derivada negativa) en el intervalo (-1,1) y creciente en el resto. Por lo tanto, tendrá un máximo en –1 y un mínimo en 1, por ejemplo la gráfica de la derecha cumple las condiciones.



3.- a) $y = \dfrac{2x^3 - 3x^2 + 2}{5x}$

$$y' = \frac{(6x^2 - 6x)\cdot 5x - (2x^3 - 3x^2 + 2)\cdot 5}{(5x)^2} = \frac{30x^3 - 30x^2 - 10x^3 + 15x^2 - 10}{25x^2} =$$

$$= \frac{20x^3 - 15x^2 - 10}{25x^2} = \frac{4x^3 - 3x^2 - 2}{5x^2}$$

b) $y = \sqrt{\cos x - sen\, x}$ $\quad y' = \dfrac{1}{2\sqrt{\cos x - sen\, x}} \cdot (-sen\, x - \cos x) = -\dfrac{sen\, x + \cos x}{2\sqrt{\cos x - sen\, x}}$

c) $y = \ln\left[\dfrac{x-3}{x+3}\right]$ $\quad y' = \dfrac{1}{\dfrac{x-3}{x+3}} \cdot \dfrac{1\cdot(x+3) - (x-3)\cdot 1}{(x+3)^2} = \dfrac{x + 3 - x + 3}{\dfrac{x-3}{x+3}\cdot (x+3)^2}$

$$y' = \frac{6}{(x-3)(x+3)} = \frac{6}{x^2 - 9}$$

d) $y = (x^2 + 3x)\cdot e^{-2x+1}$

$$y' = (2x+3)\cdot e^{-2x+1} + (x^2 + 3x)\cdot e^{-2x+1}\cdot(-2)$$

$$y' = (2x+3)\cdot e^{x^2} + (-2x^2 - 6x)\cdot e^{x^2} = e^{x^2}(-2x^2 - 4x + 3)$$

e) $y = \left(2x - \sqrt{x}\right)^2 \qquad y' = 2\left(2x - \sqrt{x}\right)\left(2 - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = 2\left(2x - \sqrt{x}\right)\frac{4\sqrt{x} - 1}{2\sqrt{x}}$

$$y' = \frac{\left(2x - \sqrt{x}\right)\left(4\sqrt{x} - 1\right)}{\sqrt{x}} = \frac{8x\sqrt{x} - 2x - 4x - \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{(8x-1)\sqrt{x} - 6x}{\sqrt{x}}$$

4.- $y = x^2 + x + 1$ tangente paralela a $y = 3x + 7$, esto significa que tiene la misma pendiente, que es 3 (coeficiente de la x).
Luego, hallaremos la derivada e igualaremos a 3:
$y' = 2x + 1 = 3 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1$, luego la recta tangente es en el punto de abscisa 1, hallemos la ordenada: $y = 1^2 + 1 + 1 = 3$
Ecuación de la recta tangente: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$
$y - 3 = 3(x - 1) \Rightarrow y = 3x - 3 + 3 \Rightarrow y = 3x$